

Dev n°38Titre: H_α est un espace de Hilbert

On veut m.g.

Thm:Soit $\alpha > 0$.

On pose :

$$H_\alpha := \left\{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \|f\|_{H_\alpha}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

On a H_α est un espace de Hilbert.Démo:* $(H_\alpha, \|\cdot\|_{H_\alpha})$ est préhilbertien:Pour $f, g \in H_\alpha$, on a :

$$\langle f, g \rangle_{H_\alpha} := \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx.$$

• Bien définie:Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ muni de la mesure $(1 + \|x\|^{2\alpha}) dx$ on a :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{H_\alpha} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{g}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{H_\alpha} \|g\|_{H_\alpha} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale définissant le produit scalaire cv. abs.

• sesquilineaire:linéaire en f et antilinéaire en g par linéarité de l'intégrale OK• symétrique hermitienne:

$$\text{On a bien } \langle f, g \rangle_{H_\alpha} = \overline{\langle g, f \rangle_{H_\alpha}} \quad \text{OK}$$

• positive:

$$\text{Intégrale de quantité positive cv } \langle f, f \rangle_{H_\alpha} = \|f\|_{H_\alpha}^2 \geq 0. \quad \text{OK}$$

• définie:

$$\text{Si } \langle f, f \rangle_{H_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{(1 + \|x\|^{2\alpha})}_{> 1} |\hat{f}(x)|^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(x)|^2 = 0 \text{ p.p.}$$

$$\Rightarrow \hat{f} = 0 \text{ p.p.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)$$

} injectivité de la TF*
par Plancherel• Conclusion: H_α est préhilbertien $\square$ * Complétude:Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans H_α .

* Complétude :

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans H_α .

Par m.g. H_α est complet, m.g. $(f_n)_{n \geq 1}$ cv dans H_α .

• Existence d'une limite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$:

Il faut par cela m.g. $(f_n)_{n \geq 1}$ est aussi de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ qui est complet.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a par le thm de Plancherel:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L^2}^2 &\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f_n - f_m}(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} |(\hat{f}_n - \hat{f}_m)(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_n(x) - \hat{f}_m(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \|f_n - f_m\|_{H_\alpha}^2 \quad \xrightarrow[n, m \rightarrow +\infty]{(f_n) \text{ Cauchy dans } H_\alpha} 0. \end{aligned}$$

Donc, $(f_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Donc, par complétude de $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\exists g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ t.q. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} g$.

• $g \in H_\alpha$:

Par le thm de Plancherel: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} g \Rightarrow \hat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \hat{g}$.

On extrait une ss-suite $(\hat{f}_{2m})_n$ qui cv vers $\hat{g}$ p.p. sur $\mathbb{R}^2$.

De plus,

$(f_n)_n$ de Cauchy dans $H_\alpha \Rightarrow$ bornée dans H_α c-a-d

$\exists M > 0$ t.q. $\|f_n\|_{H_\alpha} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Par ce qui précède, en appliquant le lemme de Fatou on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_{2m}(x)|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_{2m}(x)|^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \|g\|_{H_\alpha}^2 \leq \underbrace{\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_{2m}\|_{H_\alpha}^2}_{\substack{\text{bornée par } M^2 \\ \text{ss-suite d'une suite bornée}}} < +\infty$$

Donc, $g \in H_\alpha$.

• Cv de f_n vers g dans H_α .

Il faut m.g. $\|f_n - g\|_{H_\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Comme (f_n) est une suite de Cauchy dans H_α :

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall n, p \geq N$:

$$\|f_n - f_p\|_{H_\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_n(x) - \hat{f}_p(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2.$$

On a : $h_n(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_p(x) - \hat{f}_{2m}(x)|^2$, qui cv p.p. vers $h(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_p(x) - \hat{g}(x)|^2$ avec $x \in \mathbb{R}^2$.

Par Fatou :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_n(x) dx \leq \varepsilon^2$$

$$h(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\alpha} |\hat{p}_p(x) - \hat{q}(x)|^2 \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}^2.$$

Par Fatou :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} h_n(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \|p_p - g\|_{H_\alpha}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|p_p - p_{2n}\|_{H_\alpha}^2.$$

De plus, comme $\forall n, n \geq N$,

La condition de Cauchy nous donne : $\|p_p - p_{2n}\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2$.

Ainsi,

$$\forall p \geq N, \quad \|p_p - g\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2. \quad \text{c-a-d déf de } p_n \text{ cv dans } H_\alpha \text{ vers } g.$$

Donc,

H_α est complet $\square$

Annexe:

• Lemme de Fatou :

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$, la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

L'égalité n'est en général pas vérifiée.

Démonstration ^{1,2,3}

[masquer]

Par définition, la fonction $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ est la **limite simple** de la suite croissante des fonctions g_p (mesurables positives) définies par :

$$\forall x \in E, \quad g_p(x) = \inf_{n \geq p} f_n(x).$$

Par conséquent, le **théorème de convergence monotone** s'applique et donne :

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int \lim_{p \rightarrow \infty} g_p d\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \int g_p d\mu.$$

Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, par définition de g_p et croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall n \geq p, \quad \int g_p d\mu \leq \int f_n d\mu,$$

autrement dit :

$$\int g_p d\mu \leq \inf_{n \geq p} \int f_n d\mu,$$

si bien que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int g_p d\mu \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{n \geq p} \int f_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu^4.$$

• Thm de Plancherel:

Théorème de PLANCHEREL

La restriction de la transformée de FOURIER à $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, que l'on note encore $f \mapsto \hat{f}$, et pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Il s'ensuit que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \|\hat{f}\|_{L^2}^2.$$

• Produit scalaire

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel ou complexe X est donc une application $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ de $X \times X$ dans $\mathbb{K}$ telle que

- $x \in X \rightarrow \langle x, y \rangle$ est $\mathbb{K}$ -linéaire pour tout $y \in X$ fixé,
- $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous $x, y \in X$,
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in X$.

• $L^2(\mathbb{R})$ est complet:

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$.

* Existence d'un candidat de limite:

Prendons une ss-suite : $(f_{n_i})_i$ t.q. $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L^2} \leq 2^{-i}$.

Poseons :

$$g_k := \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

$$g := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

On a :

$$\|g_k\|_{L^2} \leq \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L^2} \leq \sum_{i=1}^k 2^{-i} \leq 1.$$

En appliquant Fatou on a :

$$\liminf \|g_k\|_{L^2} \leq \liminf \|g_k\|_{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \|g\|_{L^2} \leq 1$$

Donc, g_k sont finit p.p. et donc par p.p. x la série $\sum |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ cv. abs.

Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette série télescopique cv, elle cv vers $f(x)$.

Cela déf. p.p. une fonction f .

* M.g. $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(f_n) de Cauchy, donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n, m \geq N, \int |f_n - f_m|^2 < \varepsilon^2$$

Prendons $n = n_i$, on a par Fatou :

$$\int |f - f_m|^2 < \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^2 < \varepsilon^2$$

$\Rightarrow f_n$ cv vers f et f est dans L^2 par in. triangulaire. $\square$

$$\bullet \text{ TF : } \hat{f}(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt \\ \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi xt} dt \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt \end{cases}$$

• Pourquoi le α ?

La morale est que plus α est grand, plus H_α est restrictif :

• Pourquoi le α ?

La morale est que plus α est grand, plus H_α est restrictif :

On a $(1 + \|x\|^{2\alpha})$ grand pour α "grand"
donc il faut que $|\hat{f}(x)|^2$ soit "petit"

Car particulier de $\alpha=1$:

$$H_1 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ et } \text{grad } f \in L^2 \}$$

$\uparrow$ car $\hat{f}_j \hat{f} = \widehat{\partial_j f}$
 donc il faut $\text{grad } f$ dans L^2

Rappel: sur les TF:

$$\text{si } f \text{ est dans } L^1 \Rightarrow \hat{f}(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$$

$$f \text{ dans } L^2 \Rightarrow \hat{f} \text{ croît plus vite vers } 0 \text{ en } +\infty$$

de plus en plus avec la régularité de f .

* H^α utile par les éq. aux dérivées partielles : espaces de Sobolev

• Question colle:

Peut-on faire sur $\mathbb{R}^N$? oui ça change rien

Parquoi pas sur $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$? Ça change rien

M.q. $\mathcal{E}^1$ est complet? Par q. elle norme? Oui par $(\mathcal{E}^1([a,b]))$ $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^1}$
avec $\|f\|_{\mathcal{E}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}^1([a,b])$, de Cauchy.

On a alors $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, $f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} h$ comme suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^0$

De plus,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt.$$

f_n' de Cauchy $\Rightarrow$ bornée.

On peut donc intervertir limite et intégrale et donc $g' = h$. (Thm c.d)

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ cv vers } g \in \mathcal{E}^1([a,b])$.

Donc $\mathcal{E}^1$ est complet $\square$

$f=0$ p.p. $\Leftrightarrow f=0$ dans L^p ? Oui car
 $L^p \cong L^p/\sim$

Or une fonction positive est d'intégrale nulle si et seulement si elle s'annule presque partout, c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable. L'espace $L^p(X, A, \mu)$ est alors défini comme quotient de l'espace des fonctions mesurables p intégrables, souvent noté : $\mathcal{P}(X, A, \mu)$, par le sous-espace vectoriel des fonctions presque partout nulles. Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont dans la même classe pour la relation d'équivalence « $f \sim g$ » ssi « f et g sont égales presque partout ».

Thm:

Soit $\alpha > 0$. Posons

$$H_\alpha := \{ f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } \|f\|_{H_\alpha}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}(x)|^2 dx < +\infty \}$$

Alors, $(H_\alpha, \|\cdot\|_{H_\alpha})$ est un e. Hilbert.

Démo:

* Préhilbertien:

Soient $f, g \in H_\alpha$, on pose:

$$\langle f, g \rangle_{H_\alpha} := \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^{2\alpha}) \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx.$$

- Bien déf: OK
- séquentaire: OK
- sym. hermitienne: OK
- déf. positive: OK

* Complet:

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H_α .

1) M.q. f_n cv dans $L^2(\mathbb{R}^N)$:

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L^2}^2 &\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}_n - \hat{f}_m|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_n - \hat{f}_m|^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \|f_n - f_m\|_{H_\alpha}^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ qui est complet: $\exists g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} g$

2) M.q. $g \in H_\alpha$

R.q: • Plancherel: $\hat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \hat{g}$

On extrait une ss-suite $(\hat{f}_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui cv vers $\hat{g}$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$.

• $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans H_α : (f_n) borné par M .

Posons $h_{k(n)}(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{f}_{k(n)}(x)|^2$,

et $h(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |\hat{g}(x)|^2$

Par le lemme de Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{k \rightarrow +\infty} h_{k(n)}(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h_{k(n)}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \|g\|_{H_\alpha}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\|f_{k(n)}\|_{H_\alpha}^2}_{< M^2} < +\infty$$

Donc, $g \in H_\alpha$.

3) M.q. $f_n \xrightarrow{H_\alpha} g$:

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_{H_\alpha} < \varepsilon$.

Posons $m_k(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |(\hat{f}_n - \hat{f}_{k(n)})(x)|^2$

et $m(x) = (1 + \|x\|^{2\alpha}) |(\hat{f}_n - \hat{g})(x)|^2$

Par le lemme de Fatou:

$$\|f_n - g\|_{H_\alpha}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|f_n - f_{k(n)}\|_{H_\alpha}^2 \leq \varepsilon^2$$

Donc, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_\alpha} g$ $\square$